Απειροστικός Λογισμός Ι   Μάθημα 1   05/09/2015

Έχουμε ένα σύνολο $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με δύο πράξεις:

$$+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to x+y$$

$$\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to x\cdot y$$

και μια σχέση αυστηρής διάταξης ($<$), ώστε να ισχύουν τα εξής αξιώματα: $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$

(R_1) $x+y=y+x$

(R_2) $x+(y+z)=(x+y)+z$

(R_3) $x+0=0+x=x$

(R_4) $\forall x\in\mathbb{R}$ $\exists x'\in\mathbb{R}$ τ.ω. $x+x'=0$ (αποδεικνύεται πως είναι μοναδικό και συμβολίζεται $-x$).

(R_5) $x\cdot y=y\cdot x$

(R_6) $(xy)z=x(y\cdot z)$

(R_7) $x\cdot 1=1\cdot x=x$ $\boxed{1\neq 0}$

(R_8) $\forall x\in\mathbb{R}^*$ $\exists \tilde{x}\in\mathbb{R}$ τ.ω. $x\cdot\tilde{x}=1$ (αποδεικνύεται πως είναι μοναδικό και συμβολίζεται x^{-1} ή $\frac{1}{x}$).

(R_9) $x(y+z)=xy+xz$.

(R_{10}) $\forall x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει ακριβώς μια από τις: $x<y$, $x=y$, $x>y$.

(R_{11}) Αν $x<y$ και $y<z$ τότε $x<z$.

(R_{12}) Αν $x<y$ και $z\in\mathbb{R}$ τότε $x+z<y+z$

(R_{13}) Αν $x<y$ και $z>0$ τότε $xz<yz$.

(R_{14}) Αξίωμα της πληρότητας.

Πρόταση:

(i) Αν $x+y=x+z$ τότε $y=z$

(ii) $x\cdot 0=0$

(iii) $(-a)\cdot b=-(ab)$

(iv) $(-a)(-b)=ab$

(v) $a\cdot a=a^2$ για $a\neq 0$ $a\cdot a>0$

(vi) $1>0$ (προκύπτει από το προηγούμενο για $a=1$)

Ορισμός:

$2=1+1$

$3=2+1$

$\vdots$

$10=9+1$

$$\boxed{ab=a\cdot 10^1+b\cdot 10^0}$$

Ορισμός: $a-b=a+(-b)$

αν $b\neq 0$: $\frac{a}{b}=a\cdot b^{-1}$

Συμβολισμός: $a\leq b$ σημαίνει $a<b$ ή $a=b$

Συμπέρασμα: Οι σχέσεις $0<1$ και $0\leq 1$ είναι αληθείς ενώ οι σχέσεις $1<0$ και $1\leq 0$ είναι ψευδείς.

$(a,b)\in\mathbb{R}$ με $a<b$

$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}$ με $a<x<b\}$

$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}$ με $a\leq x\leq b\}$

$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}$ με $a\leq x<b\}$

$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}$ με $a<x\leq b\}$

$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}$ με $x>a\}$

$[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}$ με $x\geq a\}$

$(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}$ με $x<b\}$

$(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}$ με $x\leq b\}$

Ορισμός: Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(i) Ένας πραγματικός αριθμός M λέγεται άνω φράγμα του A αν $\forall x\in A$ ισχύει $x\leq M$.

(ii) Ένα σύνολο λέγεται άνω φραγμένο, αν έχει ένα τουλ. άνω φράγμα.

(iii) Ένας πραγματικός αριθμός m λέγεται κάτω φράγμα του A αν $\forall x\in A$ ισχύει $x\geq m$.

(iv) Ένα σύνολο λέγεται κάτω φραγμένο, αν έχει ένα τουλ. κάτω φράγμα.

...ηρήσεις: (i) Αν το M είναι άνω φράγμα του A και $b>M$, τότε ο b είναι επίσης άνω φράγμα του A.

(ii) Αν το m είναι κάτω φράγμα του A και $\gamma<m$, τότε ο γ είναι επίσης κάτω φράγμα του A.

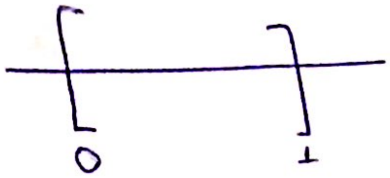
Παράδειγμα:

α) Αν $A=[0,1]$ ο αριθμός 1 είναι άνω φράγμα του A, όπως και κάθε b με $b>1$.

Το $1/2$ δεν είναι άνω φράγμα του A.

Το 0 είναι κάτω φράγμα του A, όπως και κάθε γ με $\gamma<0$ είναι επίσης κάτω φράγμα.

Το $1/2$ δεν είναι κάτω φράγμα του A.



β) Τα ίδια ισχύουν για το $A=(0,1)$

γ) Το $A=(0,+\infty)$ δεν είναι άνω φραγμένο. Πράγματι αν $M\in\mathbb{R}$ υπάρχει $x\in A$ με $x>M$.

Το A όμως είναι κάτω φραγμένο.

Παρατήρηση: Ένα άνω φράγμα μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο σύνολο.

Ορισμός: Έστω A υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(i) Ένας αριθμός $x\in A$ λέγεται μέγιστο στοιχείο του A, αν για κάθε $a\in A$ ισχύει $a\leq x$.

συμβολίζεται $x=\max A$.

(ii) Ένας αριθμός $x\in A$ λέγεται ελάχιστο στοιχείο του A, αν για κάθε $a\in A$ ισχύει $a\geq x$.

συμβολίζεται $x=\min A$.

Παραδείγματα:

(i) Το $A=[0,1]$ έχει μέγιστο στοιχείο $\max A=1$ και ελάχιστο στοιχείο $\min A=0$.

(ii) Το $A=(0,1)$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο, ούτε και ελάχιστο.

(iii) Το $A=[0,1)$ έχει ελάχιστο στοιχείο $\min A=0$, αλλά δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

(iv) Το $A=(0,1]$ έχει μέγιστο στοιχείο $\max A=1$, αλλά δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

Ορισμός: Έστω A ένα άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Ο αριθμός $a\in\mathbb{R}$ λέγεται ελάχιστο άνω φράγμα (ή supremum) του A.

αν 1) το a είναι άνω φράγμα του A (δηλαδή $x\leq a$ $\forall x\in A$) και

αν 2) το b είναι άνω φράγμα του A (δηλαδή $x\leq b$ $\forall x\in A$) τότε $a\leq b$.

Το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου A, αν υπάρχει, είναι μοναδικό.

Απόδειξη: Έστω a, a' ελάχιστα άνω φράγματα του A

Από (i) για το a, το a είναι άνω φράγμα του A, από (ii) για το a, $a \leq a'$
Από (i) για το a', το a' είναι άνω φράγμα του A, από (ii) για το a', $a' \leq a$ } $a = a'$

Το ελάχιστο άνω φράγμα του A, που όπως είδαμε είναι μοναδικό, ονομάζεται supremum του A και συμβολίζεται supA.

Παρατηρήσεις:

(i) Αν ένα σύνολο έχει μέγιστο στοιχείο, τότε το supremum είναι ακριβώς αυτό.

$a = \max A$ τότε $a = \sup A$.

(ii) Το supA μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο A

Π.χ. $A = (0,1)$ $\sup A = 1$ όμως $1 \notin A$

Το 1 είναι άνω φράγμα του A και επίσης δεν υπάρχει άνω φράγμα του A μικρότερο του 1 (δηλαδή αν b άνω φράγμα του A, τότε $b \geq 1$).

(R14) Αξίωμα της πληρότητας

Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

Ορισμός: Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Ο αριθμός $\gamma \in \mathbb{R}$ λέγεται μέγιστο κάτω φράγμα (ή infimum) του A.

αν 1) το γ είναι κάτω φράγμα του A (δηλαδή $x \geq \gamma$ $\forall x \in A$) και

αν 2) το δ είναι κάτω φράγμα του A (δηλαδή $x \geq \delta$ $\forall x \in A$) τότε $\gamma \geq \delta$.

Το μέγιστο κάτω φράγμα του A, που όπως είδαμε είναι μοναδικό, ονομάζεται infimum του A και συμβολίζεται infA.